

Comment mélanger en écoulement laminaire ?

par **Aurélien BEUF**

Lycée Paul Éluard - 93206 Saint-Denis

aurelien.beuf@ac-creteil.fr

et **Florence RAYNAL**

Laboratoire de mécanique des fluides et d'acoustique - CNRS

École Centrale de Lyon - 69134 Écully

florence.raynal@ec-lyon.fr

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous souhaitons toucher du doigt la théorie du mélange dans le cadre des écoulements laminaires, qui sont instinctivement connus pour mal mélanger. Nous allons appliquer ici le principe du chaos, sur un exemple basé sur des écoulements paraboliques croisés pour illustrer qu'il est possible de mélanger malgré le caractère laminaire de l'écoulement. Cet article peut faire l'objet d'un petit exercice de programmation très accessible, à partir de n'importe quel outil de programmation (C, Fortran, ...), ou peut servir de point de départ pour un TIPE (Travaux d'initiative personnelle encadrés).

1. EST-IL SIMPLE DE BIEN MÉLANGER ?

Ceux qui prennent du sucre dans leur café du matin savent tous intuitivement que pour mélanger, il suffit de bien remuer, et les tourbillons résultants de cette action mécanique se chargeront d'homogénéiser l'ensemble. Le régime d'écoulement ainsi créé est dit turbulent, et la turbulence est réputée bien mélanger, par opposition aux écoulements plus calmes, dits laminaires. C'est justement cette propriété de mélange qui a été utilisée par REYNOLDS dans sa célèbre expérience d'écoulement dans un canal pour montrer l'existence des deux régimes [1] ; nous allons rapidement en décrire le principe : la grosse difficulté de la mécanique des fluides est qu'il n'y a pas unicité du champ des vitesses. REYNOLDS a étudié dans quelles conditions on observait la solution laminaire, ou au contraire un écoulement turbulent. Nous montrons en annexe que, pour l'écoulement entre les deux plaques parallèles du canal, il existe une solution laminaire dite « parabolique » du champ de vitesse, qui est unidimensionnelle du type :

$$\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$$

avec :

$$v(y) = 3/2 V_m (1 - 4y^2/L^2)$$

où V_m est la vitesse moyennée sur la hauteur, aussi appelée « vitesse de débit ». C'est effectivement ce type d'écoulement parabolique (cf. figure 1) que l'on observe à faible

vitesse moyenne : c'est la solution dite « laminaire » du problème. À plus grand débit en revanche, on obtient un régime d'écoulement différent, dit « turbulent », où le champ des vitesses n'est plus unidirectionnel et dépend fortement du temps.

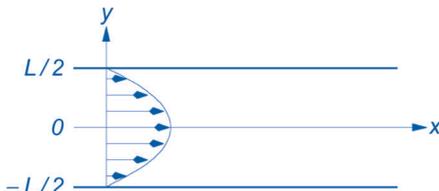


Figure 1 : Écoulement parabolique laminaire entre deux plans.

REYNOLDS a montré l'existence de ces différents régimes en observant l'évolution d'un « filet » de colorant injecté continûment en un point de l'écoulement :

- ◆ dans le cas laminaire, le filet reste rectiligne, comme on pouvait le prévoir avec un écoulement unidirectionnel ;
- ◆ dans le cas turbulent, le colorant se mélange rapidement entre les plaques.

REYNOLDS a alors montré que, quel que soit l'écoulement, ses propriétés mélangantes ou non dépendaient plus particulièrement d'un nombre sans dimension auquel on a donné son nom, le « nombre de Reynolds », défini par :

$$\text{Re} = \frac{V \cdot L}{\eta / \rho}$$

où V est la vitesse caractéristique de l'écoulement, L la longueur caractéristique (ici la distance entre les deux plaques), η est la viscosité du fluide (encore appelée viscosité « dynamique ») et ρ sa masse volumique. La vitesse caractéristique est notre vitesse moyenne dans le cas d'écoulement entre deux plaques, mais cela peut également être la vitesse d'un objet qui se déplace dans le fluide et crée ainsi l'écoulement, comme dans le cas de notre cuillère dans la tasse à café. Généralement, on introduit le coefficient $\nu = \eta / \rho$, encore appelé viscosité « cinématique ».

Dans le cas de l'écoulement entre deux plaques, la transition laminaire/turbulent intervient pour un nombre de Reynolds $\text{Re} = V \cdot L / \nu$ de l'ordre de 2000. Pour en revenir à notre tasse à café, si celle-ci a un diamètre $D = 4$ cm (D est alors la longueur caractéristique), et que la cuillère fait un tour en deux secondes, la vitesse caractéristique vaut alors 2π cm/s.

Comme la viscosité de l'eau ν est de l'ordre de 10^{-2} cm²/s, le nombre de Reynolds vaut alors $\text{Re} = (2\pi) \times 4 / 10^{-2} \approx 2500$: il s'agit bien du régime turbulent.

2. PEUT-ON MÉLANGER LORSQUE L'ÉCOULEMENT EST LAMINAIRE ?

Contrairement aux idées reçues, il est tout de même possible de mélanger avec des écoulements à faible Reynolds, dits laminaires. En effet, même un champ de vitesse très simple peut conduire à des trajectoires très compliquées, dites chaotiques : ainsi, deux particules fluides initialement très proches peuvent se séparer exponentiellement vite, donc une goutte de colorant par exemple peut rapidement envahir une grande partie de l'espace, voire sa totalité.

C'est POINCARÉ [2] qui a introduit le premier au XIX^e siècle la notion de chaos, dans le cadre de la mécanique céleste. Il faut attendre le XX^e siècle [3] pour découvrir que la théorie du chaos permet aussi de mélanger dans les écoulements laminaires, et le XXI^e siècle pour trouver un champ d'application dans la microfluidique (systèmes de petite taille, tels les appareils d'analyse médicale portables).

La théorie des systèmes dynamiques indique qu'un système doit avoir au moins trois degrés de liberté pour pouvoir donner du chaos. Ainsi, un écoulement dans un plan, dont les propriétés ne dépendent pas du temps (champ de vitesse stationnaire par exemple), ne peut donner du chaos, donc ne peut mélanger ; c'est également ce qu'a observé REYNOLDS dans son expérience ! Il est donc nécessaire d'avoir un écoulement dépendant du temps (donc trois degrés de liberté : x , y et le temps t) si l'on veut espérer obtenir des trajectoires compliquées... Dans la pratique, un écoulement 2D **périodique en temps** est suffisant.

Le chaos des trajectoires est généralement caractérisé par un phénomène d'étirements-replis successifs du fluide, appelé de manière très parlante « transformation du boulanger » (cf. figure 2) : lorsqu'il fait sa pâte, le boulanger l'étale puis la replie sur elle-même et répète cette opération jusqu'à ce que les constituants soient mélangés de façon homogène. La figure 2d montre les striations caractéristiques de ce phénomène dans la direction de l'étirement. Notons que ces striations, visibles pour un très petit nombre de cycles, deviennent très rapidement indiscernables dès que le mélange est suffisant.

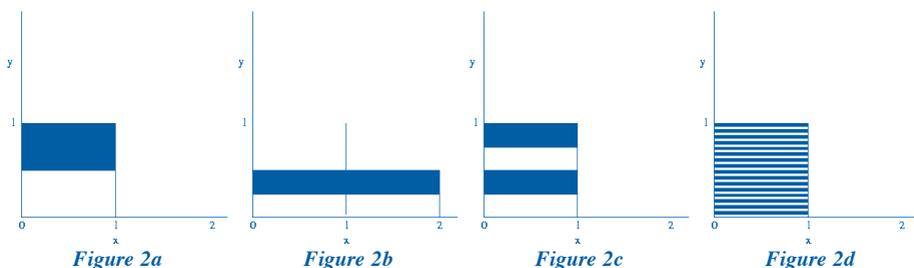


Figure 2 : Transformation du boulanger : pour préparer sa pâte (a), le boulanger étale celle-ci sur deux fois sa longueur (b), la coupe et la replie (c). Les trois phases précédentes forment un cycle. Après quelques cycles (d), on voit apparaître des striations dans le sens de l'étirement, caractéristiques du chaos. Lorsque le nombre de cycles est suffisamment grand, la pâte est parfaitement mélangée.

L'exemple que nous proposons ici est un écoulement modèle, dont le champ de vitesse, très simple, permet une intégration analytique des trajectoires : considérons une cellule d'écoulement de forme carrée et de côté L . À l'intérieur de cette cellule, on impose un écoulement parabolique successivement dans la direction x , puis dans la direction y , avec une vitesse moyenne V_m .

On a donc :

- ◆ Pour $0 \leq t < T_x$ (phase 1) : écoulement selon \vec{e}_x de durée T_x :

$$\begin{aligned} v_x(y, t) &= 3/2 V_m (1 - 4 y^2 / L^2) \quad \text{pour } -L/2 \leq y \leq L/2, \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \\ v_y(t) &= 0. \end{aligned}$$

- ◆ Pour $T_x \leq t < T_x + T_y$ (phase 2) : écoulement selon \vec{e}_y de durée T_y :

$$\begin{aligned} v_x(t) &= 0. \\ v_y(x, t) &= 3/2 V_m (1 - 4 x^2 / L^2) \quad \text{pour } -L/2 \leq x \leq L/2, \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

- ◆ Pour $T_x + T_y \leq t < 2T_x + T_y$ (phase 3) : écoulement inverse de celui de la phase 1 :

$$\begin{aligned} v_x(y, t) &= -3/2 V_m (1 - 4 y^2 / L^2) \quad \text{pour } -L/2 \leq y \leq L/2, \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \\ v_y(t) &= 0. \end{aligned}$$

- ◆ Pour $2T_x + T_y \leq t < 2T_x + 2T_y$ (phase 4) : écoulement inverse de celui de la phase 2 :

$$\begin{aligned} v_x(t) &= 0. \\ v_y(x, t) &= -3/2 V_m (1 - 4 x^2 / L^2) \quad \text{pour } -L/2 \leq x \leq L/2, \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Sur la figure 3 (cf. page ci-contre), nous avons représenté les quatre phases qui composent chaque cycle. Le processus de mélange a lieu grâce à la **répétition périodique** (période $T = 2 \times T_x + 2 \times T_y$) de ce cycle élémentaire. Il est clair que, pour une phase donnée, la vitesse ne dépend pas explicitement du temps ; cependant comme le champ des vitesses est différent à chaque phase, on a bien de manière générale $v = v(x, y, t)$ donc trois degrés de liberté, *deux d'espace et un de temps*.

3. SIMULATION DES TRAJECTOIRES DE PARTICULES FLUIDES

Nous pouvons alors suivre numériquement la trajectoire de plusieurs « particules fluides » (petits éléments de fluides, pouvant être considérés comme des objets ponctuels entraînés par l'écoulement). Le programme peut très aisément être implémenté dans la plupart des langages de programmation usuels. L'étude peut porter sur une ou plusieurs

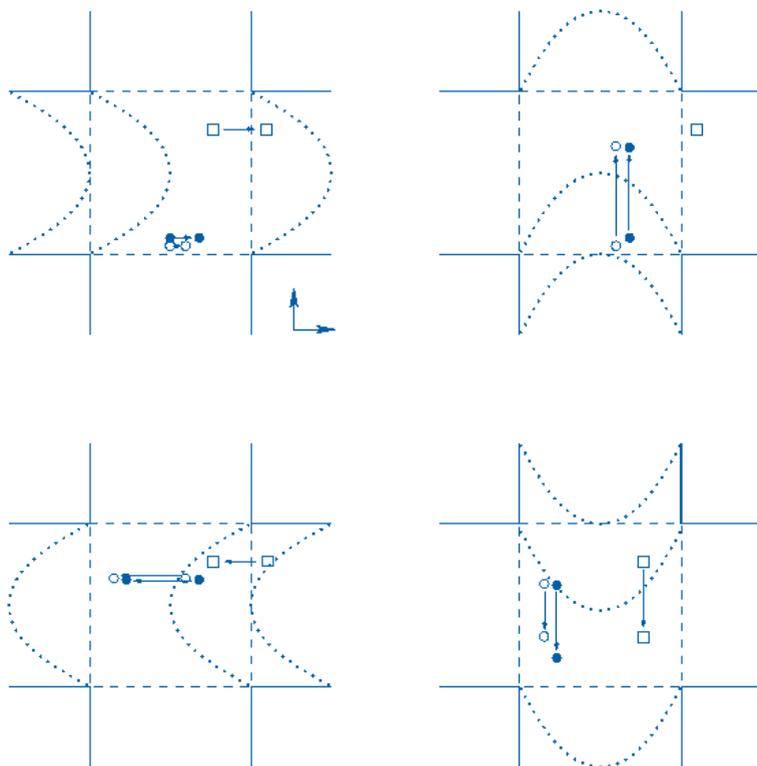


Figure 3 : Protocole de mélange périodique au croisement de deux canaux. La zone active de mélange est représentée en pointillés. Les quatre figures représentent les quatre phases élémentaires d'un cycle : dans la partie centrale, le champ des vitesses dépend de x , de y et du temps de manière périodique. Chaque cycle, d'une durée T , sera répété jusqu'à ce que le mélange soit considéré comme suffisant. Nous avons fait figurer les déplacements de deux particules initialement très proches, qui se sont légèrement éloignées au bout d'une période. Au bout de quelques périodes, elles seront complètement séparées. Nous avons également montré le déplacement d'une particule qui sort momentanément du domaine (symbole carré).

particules fluides, avec des positions initiales différentes dans la chambre.

Par exemple, une particule fluide se trouvant en (x, y) au début de la phase 1, avec $-L/2 \leq y \leq L/2$, se trouvera en $(x + v_x(y) \times T_x, y)$ à la fin de cette phase, où $v_x(y)$ est le champ de vitesse donné pour la phase 1.

Dans cet écoulement modèle, une particule fluide qui dépasse les frontières de la cellule pendant la phase numéro i reste immobile à l'étape $i + 1$, mais revient dans la cellule à l'étape $i + 2$ (écoulement inverse de celui de l'étape i , voir par exemple la particule représentée par un carré entre les phases 1 et 3 sur la figure 3).

Cependant, l'expérience montre qu'il n'est pas toujours très simple, au regard d'une

trajectoire donnée, de décider si elle est effectivement chaotique ou non. Ainsi, pour étudier le chaos, l'outil le plus généralement utilisé est le tracé des sections de Poincaré : plutôt que de tracer la totalité de ces trajectoires, on effectue une réduction des dimensions de l'espace (de dimension n), en projetant ces trajectoires sur un espace plus petit (de dimension $n - 1$).

Comme nous l'avons montré, la dimension de l'espace de départ doit être au moins égale à 3 pour espérer obtenir des trajectoires chaotiques. Dans le cas $n = 3$, l'espace de projection est de dimension 2, c'est donc un plan : la section de Poincaré consiste alors à recouper la trajectoire à l'aide d'un plan, et de relever les points d'intersection.

Dans notre exemple, nous avons bien $n = 3$ (deux dimensions d'espace + une dimension temporelle puisque le champ de vitesse dépend du temps). Nous allons conserver le plan de l'écoulement en effectuant une coupe en temps plutôt qu'en espace ; l'écoulement étant périodique en temps, la coupe en temps sera effectuée toutes les périodes.

Ainsi, le tracé d'une section de Poincaré de notre système s'effectue en relevant les positions successives des particules fluides toutes les périodes (à partir de $t = 0$), puis en les reportant cumulativement sur une carte du domaine de l'écoulement. Les sections de Poincaré font alors apparaître les zones « chaotiques » (zones denses de points), et les zones « régulières » (zones « vides » de points, ou dans lesquelles les points successifs s'organisent sur des courbes). Même si cette notion de « section de Poincaré » peut sembler très théorique, nous allons montrer par l'exemple qu'elle est dans la pratique un formidable outil visuel pour qualifier les capacités de mélange de l'écoulement.

Le modèle fait intervenir deux nombres sans dimension indépendants : le premier caractérise la dissymétrie du protocole de mélange à travers le paramètre $\alpha = T_x/T_y$; le deuxième est la quantité de fluide déplacé pendant une période T rapportée à la quantité de fluide dans la cellule, soit $\beta = V_m T/L$. L'étude paramétrique du problème consiste alors à chercher pour quels couples de paramètre (α , β) le mélange donne les sections de Poincaré présentant les zones chaotiques les plus vastes et les plus homogènes.

La figure 4 (*cf.* page ci-contre) montre deux sections de Poincaré pour deux couples de paramètres (α , β) différents. La figure 4a représente un cas de chaos non global car on peut remarquer qu'il existe, pour ce couple de paramètres, une zone régulière très vaste dans la section de Poincaré. La figure 4b montre, au contraire, un cas de chaos quasi global puisque les zones régulières sont de très petite taille.

Pour mieux comprendre l'intérêt des sections de Poincaré dans le problème de mélange, nous avons tracé l'évolution d'une tache (du colorant dans de l'eau par exemple, pour lequel on néglige l'effet de la diffusion moléculaire) ; nous avons choisi ici de la représenter numériquement par cinq mille particules élémentaires dont nous avons calculé les trajectoires. Sur les figures 5, 6 et 7, on constate l'état du mélange à différents instants, que nous avons choisis être des multiples entiers de la période : nous remarquons que la répartition de la tache tend toujours à s'approcher de la section de Poincaré

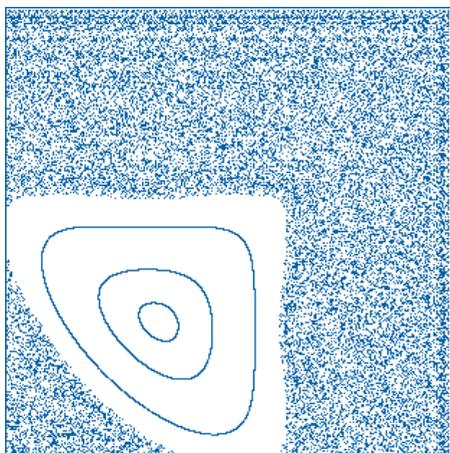


Figure 4a

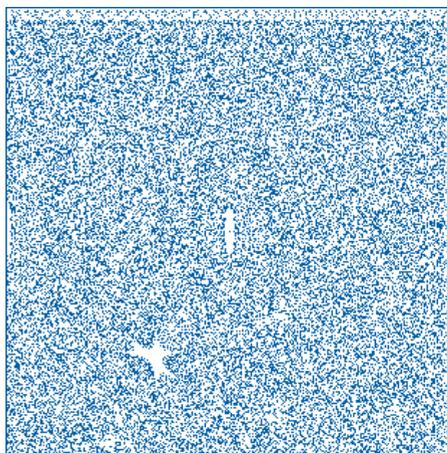


Figure 4b

Figure 4 : Sections de Poincaré (a) d'un cas de mauvais mélange ($\alpha = 0,83$; $\beta = 1,100$) (b) d'un cas d'un assez bon mélange ($\alpha = 0,78$; $\beta = 1,515$). Expérimentalement, les petites zones de mauvais mélange vont rapidement être comblées par diffusion moléculaire.

correspondante. Ainsi, les sections de Poincaré représentent de véritables outils d'étude du mélange, puisque les zones chaotiques représentent les zones de bon mélange, alors que les zones régulières correspondent au contraire aux zones de mauvais mélange.

La présence de zones régulières de petite taille n'est pas un problème puisque la diffusion moléculaire, dont nous n'avons pas tenu compte dans ce modèle, va rapidement les combler. Notons que les zones régulières se déplacent au cours du temps sous l'effet du champ de vitesse, pour revenir à la fin de chaque période à leur position initiale. Ceci n'est bien sûr pas visible sur les sections de Poincaré puisque les points ne sont reportés que toutes les périodes (section en temps), mais cela peut être aisément montré par l'élève à l'aide d'une petite animation de l'évolution de la tache. Enfin, on peut constater les nombreuses striations (figures 6b, 6c et 7b), caractéristiques du mécanisme d'« étirement – repliement » que ce système de mélange impose au fluide.

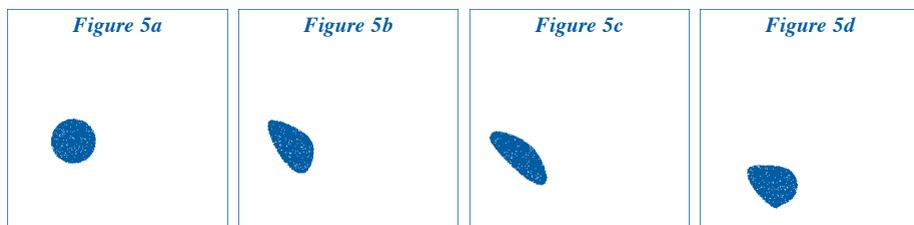


Figure 5 : Évolution d'une tache de colorant dans le cas de mauvais mélange ($\alpha = 0,83$; $\beta = 1,100$) correspondant à la section de Poincaré représentée sur la figure 4a : la tache a été initialement placée dans la zone régulière : a) $t = 0$; b) $t = 10 T$; c) $t = 20 T$; d) $t = 40 T$.

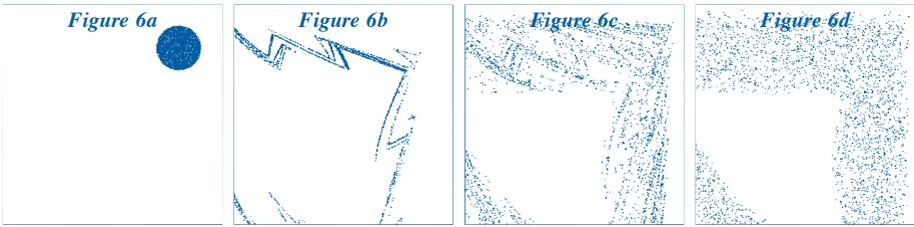


Figure 6 : Évolution d'une tache de colorant dans le cas de mauvais mélange ($\alpha = 0,83$; $\beta = 1,100$) correspondant à la section de Poincaré représentée sur la figure 4a : la tache a été initialement placée dans la zone chaotique : a) $t = 0$; b) $t = 10 T$; c) $t = 20 T$; d) $t = 40 T$.

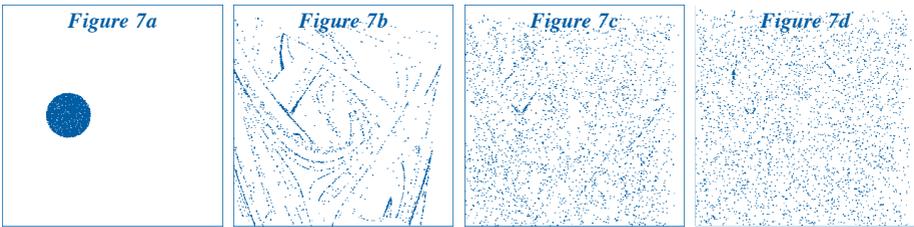


Figure 7 : Évolution d'une tache de colorant dans le cas de bon mélange ($\alpha = 0,78$; $\beta = 1,515$) : quelle que soit la position initiale de la tache, on obtient un mélange homogène sur toute la surface, conformément à la section de Poincaré correspondante (cf. figure 4b) : a) $t = 0$; b) $t = 10 T$; c) $t = 20 T$; d) $t = 40 T$.

CONCLUSION

Nous espérons ainsi avoir fait comprendre au lecteur les bases du mélange des fluides en écoulements laminaires lorsque – *a priori* – on pense que cela est impossible. Nous avons introduit le cas particulier du mélange à base d'écoulements 2D et périodiques en temps, puis nous avons introduit l'outil d'analyse bien pratique qu'est la section de Poincaré de l'écoulement. L'étude de l'efficacité du mélange consiste alors à chercher les paramètres qui donnent les meilleures sections de Poincaré. On peut également imaginer d'autres mélangeurs (par exemple, un système à deux étapes seulement avec les phases 1 et 2, où le fluide qui sort du domaine à l'étape i est réinjecté par le côté opposé à l'étape $i + 2$). D'expérience, nous savons que le lecteur en quête des meilleurs paramètres de son mélangeur va vite se prendre au jeu !

Malgré l'aspect ludique, nous insistons sur le fait qu'il s'agit d'un problème fondamental, qui commence seulement aujourd'hui, avec la miniaturisation des systèmes fluidiques, à trouver de véritables applications. On pourra par exemple citer les biocapteurs, qui sont des dispositifs destinés à détecter la présence de molécules données (marqueurs du cancer, ADN viral, etc.) dans un échantillon biologique (sang, salive, etc.). Le principe de détection repose sur une réaction chimique entre ladite molécule et un marqueur dont les propriétés (couleur, émission de fluorescence, etc.) changent après réaction. Pour que cette réaction puisse avoir lieu, il faut favoriser les chances de rencontre entre la

molécule et son marqueur spécifique, ce qui ne peut être réalisé que grâce à un mélange efficace. Pour un système d'analyse portable, où le patient fait l'analyse chez lui ou chez son médecin, la quantité d'échantillons biologiques doit être très faible (typiquement une goutte). Le système d'analyse doit donc lui aussi être de très petite taille, ce qui relève des écoulements à très faible nombre de Reynolds, donc laminaires. Dans ces conditions, un bon mélange ne pourra être réalisé que grâce à un système analogue à celui que nous venons de présenter [4].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] REYNOLDS O. « An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion in parallel channels shall be direct or sinuous and the law of resistance in parallel channels ». *Proceedings of the Royal Society of London*, january 1883, vol. 35, n° 224-226, p. 84-99.
- [2] POINCARÉ H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Paris : Éditions Gauthier-Villars, 1893.
- [3] AREF H. « Stirring by chaotic advection ». *J. Fluid. Mech*, 1984, n° 143, p. 1-21.
- [4] BEUF A., RAYNAL F., GENCE J.-N. et CARRIÈRE P. « Optimisation du protocole de mélange et de la géométrie d'une chambre d'hybridation de puces à ADN ». *La Houille Blanche*, 2007, n° 6, p. 39-44.



Aurélien BEUF
Professeur de physique en PCSI
 Lycée Paul Éluard
 Saint-Denis (Seine-Saint-Denis)



Florence RAYNAL
Chercheur au CNRS
 Laboratoire de mécanique des fluides et d'acoustique
 École centrale de Lyon
 Écully (Rhône)

Annexe

Solution laminaire du champ de vitesse entre deux plaques parallèles

En mécanique des fluides, l'équation qui décrit le mouvement des fluides newtoniens homogènes est l'équation de Navier Stokes qui, pour des écoulements incompressibles ($\text{div } \vec{v} = 0$) et en l'absence de forces extérieures, s'écrit :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = - \overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v}$$

où \vec{v} est la vitesse du fluide, ρ sa masse volumique, η sa viscosité dynamique (en Poiseuille, $1 \text{ Pl} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$), P la pression et où $D./Dt = \partial./\partial t + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$ est la dérivée particulaire.

Dans le cas de l'écoulement entre deux plaques parallèles situées en : $y = -L/2$ et $y = L/2$, nous allons chercher une solution stationnaire possédant les mêmes symétries, c'est-à-dire un écoulement parallèle à l'axe des x : $\vec{v} = v(y) \vec{e}_x$.

L'écoulement est stationnaire, alors $\partial \vec{v} / \partial t = \vec{0}$; de même, $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v} = v(y) \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{0}$.

L'équation de Navier Stokes se résume alors à l'équation de Stokes :

$$\vec{0} = - \overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \frac{d^2 \vec{v}}{dy^2}$$

Comme \vec{v} ne dépend pas de x , le gradient de pression est constant dans la direction x , et on peut écrire (A , B et C sont des constantes) :

$$\frac{d^2 v(y)}{dy^2} = A$$

$$v(y) = \frac{A}{2} y^2 + By + C$$

Comme le fluide est visqueux, on a deux conditions dites d'adhérence sur les parois du canal : $v(y = -L/2, t) = 0$ et $v(y = L/2, t) = 0$. En reportant dans l'équation ci-dessous, on trouve :

$$v(y) = \frac{A}{8} \times (4y^2 - L^2)$$

La constante A contient le terme de gradient de pression. Par simplicité, nous utiliserons plutôt la vitesse moyennée sur la hauteur, également appelée « vitesse de débit », définie par :

$$V_m = \frac{1}{L} \times \int_{-L/2}^{L/2} v(y) dy.$$

On a donc :

$$v(y) = \frac{3}{2} \times V_m \times \left(1 - 4 \frac{y^2}{L^2}\right).$$

On parle alors de champ de vitesse parabolique puisque son expression est l'équation d'une parabole.

Cet article comporte des compléments nommés :

- ◆ *film_alpha=0p78_beta=1p515.gif*
- ◆ *film_alpha=0p83_beta=1p100_2.gif*
- ◆ *film_alpha=0p83_beta=1p100.gif*

L'ensemble est disponible sous la forme d'un fichier zippé : 09191069.zip

NDLR : *Les .gif animés peuvent être lus avec un lecteur de média compatible ou plus simplement ouvert directement avec votre navigateur Internet habituel. Ces images animées illustrent les trois cas de mélange développés dans l'article. Lors de l'exécution d'un fichier, l'observateur voit (en accéléré) l'évolution dans le temps d'une goutte de colorant qui s'étalerait grâce au dispositif de mélange, avec plus ou moins d'efficacité. Le nom des fichiers contient les valeurs du jeu de paramètres utilisé (se référer à l'article pour voir à quoi correspondent ces paramètres).*